mathniversity®

promovemos o teu sucesso na matemática

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 24 DE JULHO 2023

1.

Tem-se que:

- $\lim\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n = e^{-2}$

- $\lim\left(-\frac{n^2+1}{n}\right) = \lim\left(-\frac{n^2}{n}-\frac{1}{n}\right) = \lim\left(-n-\frac{1}{n}\right) = -(+\infty)-\frac{1}{+\infty} = -\infty-0 = -\infty$

- $\lim\frac{4n+3}{3n+4} = \lim\frac{n\left(4+\frac{3}{n}\right)}{n\left(3+\frac{4}{n}\right)} = \lim\frac{\left(4+\frac{3}{n}\right)}{\left(3+\frac{4}{n}\right)} = \frac{4+\frac{3}{+\infty}}{3+\frac{4}{+\infty}} = \frac{4+0}{3+0} = \frac{4}{3}$

- se n é par, então $\lim\frac{(-1)^n}{n} = \lim\frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0$ e se n é ímpar, então $\lim\frac{(-1)^n}{n} = \lim\frac{-1}{n} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

  pelo que $\lim\frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Resposta correta: (D)

2.

Seja (u_n) a sucessão que traduz os perímetros dos triângulos equiláteros referidos no enunciado. Para obter cada triângulo, à exceção do primeiro, unem-se os pontos médios do triângulo anterior, pelo que o lado de cada triângulo é metade do anterior, e portanto, o perímetro de cada triângulo é metade do anterior, isto é:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo concluímos que (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Assim, como $u_1 = 3\overline{AB} = 3\times 1$, vem que a soma dos perímetros dos n primeiros triângulos da sequência é dada por:

$$S_n = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, vem que $-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 \Leftrightarrow 6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 6$, pelo que se conclui que para todo o $n \in \mathbb{N}$ a soma dos perímetros dos n primeiros triângulos da sucessão é inferior a 6.

3.

Das seis posições possíveis escolhem-se duas para colocar os dois 5, sendo ${}^6C_2$ o número de maneiras de o fazer.

Para as restantes quatro posições temos oito possibilidades para cada uma delas, qualquer um dos algarismos: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 e 9.

Logo, o total de números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, com exatamente dois cincos é ${}^6C_2 \times 8^4 = 61440$.

Resposta correta: (B)

4.

Dado que A e B são acontecimentos equiprováveis então, $P(A) = P(B)$.

Como $P(\overline{A}) = 0{,}6$ temos que $P(A) = 0{,}4 = P(B)$ e $P(\overline{B}) = 0{,}6$.

Assim,

$$P(A \cup \overline{B}) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = 0{,}7 \Leftrightarrow 1 - P(A \cap \overline{B}) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = 1 - 0{,}7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3$$

Logo,

$$P((A \cup \overline{B}) | B) = \frac{P((A \cup \overline{B}) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (\overline{B} \cap B))}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup \varnothing)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A) - P(A \cap \overline{B})}{P(B)} = \frac{0{,}4 - 0{,}3}{0{,}4} = \frac{1}{4}$$

5.

Seja n o número de hexágonos, então:

- Número de vértices dos hexágonos: $6n$
- Número de pontos: $6n+1$ (inclui o ponto V)
- Número de casos possíveis: ${}^{6n+1}C_2 = \dfrac{(6n+1)\times 6n}{2}$
- Número de casos favoráveis: $n\times {}^{6}C_2 = n\times 15$

$$\frac{n\times {}^{6}C_2}{{}^{6n+1}C_2}=\frac{5}{49} \underset{\substack{n\in\mathbb{N}\\(n\neq 0)}}{\Leftrightarrow} \frac{n\times 15}{\frac{(6n+1)\times 6n}{2}}=\frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{30}{(6n+1)\times 6}=\frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{5}{6n+1}=\frac{5}{49} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6n+1=49 \Leftrightarrow 6n=48 \Leftrightarrow n=8$$

6.

$f(x)=a+e^{bx}$, $(1,5)$ e $(2,7)$ pertencem ao gráfico de f.

$$\begin{cases} a+e^{b}=5 \\ a+e^{2b}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-a \\ \left(e^{b}\right)^2=7-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-a \\ (5-a)^2=7-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-a \\ 25-10a+a^2=7-a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-a \\ a^2-9a+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-a \\ a=6 \end{cases} \vee \begin{cases} e^{b}=5-a \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{b}=5-6 \\ a=6 \end{cases} \vee \begin{cases} e^{b}=5-3 \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} e^{b}=-1 \\ a=6 \end{cases}}_{\textit{impossível}} \vee \begin{cases} e^{b}=2 \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\ln 2 \\ a=3 \end{cases}$$

7.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}=2\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}$, (indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$).

Fazendo a mudança de variável do tipo $y=2x$, tem-se que $x\to 0$ e $y\to 0$.

Assim, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}=2\times\underbrace{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y}}_{\textit{limite notável}}=2\times 1=1$ e como tal, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}=2$

Resposta correta: (D)

8.

8.1

As coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AG]$, centro da superfície esférica pretendida, são: $\left(\frac{4+12}{2}, \frac{0+\frac{13}{2}}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = \left(8, \frac{13}{4}, 1\right)$.

O raio da superfície esférica de diâmetro $[AG]$ é dada pela distância do ponto médio do segmento de reta $[AG]$ ao ponto A.

Assim:

$$r = \sqrt{(8-4)^2 + \left(\frac{13}{4} - 0\right)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{17 + \frac{169}{16}} = \sqrt{\frac{441}{16}} = \frac{21}{4}$$

Logo, uma condição da superfície esférica de diâmetro $[AG]$ pode ser:

$$(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$$

Resposta correta: (A)

8.2.

A reta EL é paralela a FG pois o prisma considerado é reto.

Assim sendo, a reta FG é dada, por exemplo, por:

$$(x, y, z) = \left(12, \frac{13}{2}, 2\right) + k(3,4,0), k \in \mathbb{R}$$

Pode-se assim concluir que o ponto F tem de coordenadas, para dado $k \in \mathbb{R}$,

$\left(12 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2\right)$

Como a reta AF é perpendicular à reta FG, tem-se que: $\overrightarrow{AF} \bullet \vec{u} = 0$, sendo $\vec{u}(3,4,0)$ um vetor diretor da reta FG.

Além disso, $\overrightarrow{AF}$ tem de coordenadas $\left(8 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2\right)$.

Como tal,

$$\overrightarrow{AF} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \left(8 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2\right) \bullet (3,4,0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 + 9k + 26 + 16k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -2$$

Assim sendo, as coordenadas do vértice F do prisma são:

$$\left(12 + 3 \times (-2), \frac{13}{2} + 4 \times (-2), 2\right) = \left(6, -\frac{3}{2}, 2\right).$$

9.

Da observação da figura concluímos que as coordenadas dos pontos C, D e E, são, respetivamente,

$C\left(0, \frac{\overline{OA}}{4}\right)$; $D\left(\frac{\overline{OA}}{3}, 0\right)$ e $E\left(\frac{2\times\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right)$.

Determinemos agora os vetores:

$$\overrightarrow{DC} = C - D = \left(0, \frac{\overline{OA}}{4}\right) - \left(\frac{\overline{OA}}{3}, 0\right) = \left(-\frac{\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{DE} = E - D = \left(\frac{2\times\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right) - \left(\frac{\overline{OA}}{3}, 0\right) = \left(\frac{\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right)$$

Como sabemos que:

$$\overrightarrow{DC} \bullet \overrightarrow{DE} = -7 \Leftrightarrow \left(-\frac{\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right) \bullet \left(\frac{\overline{OA}}{3}, \frac{\overline{OA}}{4}\right) = -7 \Leftrightarrow -\frac{\overline{OA}^2}{9} + \frac{\overline{OA}^2}{16} = -7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -16\times\overline{OA}^2 + 9\times\overline{OA}^2 = -7\times16\times9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -7\times\overline{OA}^2 = -7\times16\times9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 16\times9$$

Como, por definição, A pertence ao semieixo positivo Ox então $\overline{OA} > 0$ e, consequentemente, $\overline{OA} = 4\times3 = 12$.

10.

O referencial I não representa parte do gráfico da função g em $]-\infty, 0[\setminus\{-1,1\}$ porque, por g ser diferenciável, é continua, logo verifica-se que $\lim_{x\to0^-} g(x) = g(0) < 0$ e no referencial I verifica-se que $\lim_{x\to0^-} g(x) = g(0) > 0$, o que contradiz o enunciado.

O referencial II não representa parte do gráfico da função g em $]-\infty, 0[\setminus\{-1,1\}$ porque, por definição,

$g'(x) < 0,\ \forall x \in]-\infty, -1[$ e no referencial II a parte da função g aí representada é crescente no intervalo $]-\infty, -1[$, consequentemente, $g'(x) > 0$, o que contradiz o enunciado.

O referencial III não representa parte do gráfico da função g em $]-\infty, 0[\setminus\{-1,1\}$ porque sendo g uma função par e $\lim_{x\to1^-} g(x) = +\infty$, teria de se verificar que $\lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty$, e verifica-se que $\lim_{x\to-1^+} g(x) = -\infty$, o que contradiz o enunciado.

11.

Como o ponto A pertence ao semieixo imaginário positivo $\arg(z_1)=\frac{\pi}{2}$.

Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero, então: $\arg(z_2)=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$.

Considerando $|z_1|=|z_2|=r$, temos que:

$$z_1^{\,2}\times z_2=\left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2\times\left(re^{i\frac{7\pi}{6}}\right)=\left(r^2e^{i\pi}\right)\times\left(re^{i\frac{7\pi}{6}}\right)=r^3e^{i\left(\pi+\frac{7\pi}{6}\right)}=r^3e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)}=r^3e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Como $0<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$, então o número complexo $z_1^{\,2}\times z_2$ pertence ao primeiro quadrante.

Resposta correta: (A)

12.

Como $\operatorname{Re}(z)=-\operatorname{Im}(z)$ e o afixo de z pertence ao 4.º quadrante, então $\arg(z)=\frac{7\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Temos também que:

$$i^{11}=i^8\times i^3=(i^4)^2\times i^3=1\times(-i)=-i=e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Considerando $w=-1-\sqrt{3}i$

$$|w|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$$

Sendo θ o argumento de w temos que:

$tg(\theta)=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$ e θ pertence ao 3.º quadrante, pelo que $\theta=\frac{4\pi}{3}$.

Assim, $z=\frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}i}=\frac{2e^{i\frac{3}{2}\pi}\times e^{i\alpha}}{2e^{i\frac{4}{3}\pi}}=\frac{2e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}}{2e^{i\frac{4}{3}\pi}}=e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha-\frac{4}{3}\pi\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$.

Como $\arg(z)=\frac{7\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$, temos:

$$\frac{\pi}{6}+\alpha=\frac{7\pi}{4}+2k\pi\ \wedge k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \wedge k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=\frac{19\pi}{12}+2k\pi\ \wedge k\in\mathbb{Z}$$

e como $\alpha\in\left[0,2\pi\right[$, então $\alpha=\frac{19\pi}{12}$.

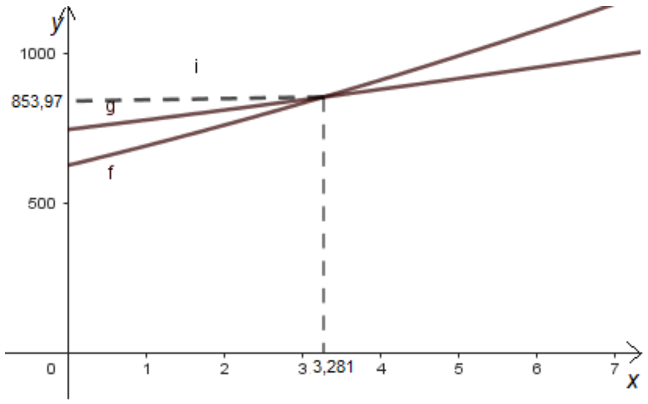
13.

A equação que permite resolver o problema é a seguinte (ou uma equivalente):

$p(2j) = p(j) + 120$.

Considerando $f(x) = p(2x)$ e $g(x) = p(x) + 120$, determinamos as coordenadas do ponto de interseção dos gráficos das duas funções, com o auxílio da calculadora gráfica.

Assim, obtemos a seguinte representação gráfica:



De onde se verifica que a taxa de juro anual inicial é $3{,}281\%$.

14.

14.1.

Estudemos a existência de assíntotas verticais:

Como a função é contínua no seu domínio, pois resulta de operações elementares entre funções contínuas, e como o domínio é $]0, +\infty[$, a reta de equação $x = 0$ é uma possível assíntota vertical ao gráfico de f.

Assim, vejamos se a função tem uma assíntota vertical quando x tende para 0 por valores superiores.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}\right) + 2 = \frac{-\infty}{0^+} + 2 = -\infty$$

logo $x = 0$ é uma equação da assíntota vertical ao gráfico de f.

Estudemos a existência de assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) + \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x}{x}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{\text{limite notável}} + 2 = 0 + 2 = 2$$

logo $y = 2$ é uma equação da assintota horizontal ao gráfico de f.

14.2.

Para estudar a função f quanto à monotonia e existência de extremos no intervalo $\left]0,+\infty\right[$, determinemos a expressão analítica da primeira derivada de f nesse intervalo:

$$\left(\frac{\ln x+2x}{x}\right)'=\frac{\left(\frac{1}{x}+2\right)\times x-\left(\ln x+2\right)\times 1}{x^2}=\frac{1+2x-\ln x-2x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Determinemos, agora, os zeros da derivada no intervalo considerado.

Seja $x\in\left]0,+\infty\right[$,

$$\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$$

Elaborando um quadro de sinal de f' e relacionando com a monotonia de f, vem

x	0		e	$+\infty$
$1-\ln x$	n.d.	+	0	-
x^2	n.d.	+	+	+
Sinal f'	n.d.	+	0	-
Monotonia de f	n.d.	↗	Máx.	↘

Conclusão:

- A função f é crescente em $\left]0,e\right]$ e decrescente em $\left[e,+\infty\right[$.
- A função f tem um máximo relativo para $x=e$, que é $f\left(e\right)=\frac{\ln e+2e}{e}=\frac{1}{e}+2$.

15.

$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AC}\times\overline{OB}}{2}=\frac{2\overline{OA}\times\overline{OB}}{2}$, pois o triângulo [ABC] é isósceles e $\overline{AB}=\overline{BC}$.

A reta AB é tangente à circunferência de raio 2 e consequentemente perpendicular à reta OT no ponto T.

Considerando os triângulos retângulos $\left[OAT\right]$ e $\left[OBT\right]$ tem-se que:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\overline{OA}}\text{ e }\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{2}{\overline{OB}}.$$

Assim sendo, $\overline{OA}=\frac{2}{\cos\alpha}$ e $\overline{OB}=\frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{2}{\operatorname{sen}\left(\alpha\right)}$.

Logo,

$$A_{\left[ABC\right]}=\frac{2\overline{OA}\times\overline{OB}}{2}=\frac{2\times\frac{2}{\cos\alpha}\times\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}}{2}=\frac{8\times\frac{1}{\cos\alpha}\times\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}}{2}=\frac{8}{2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}=\frac{8}{\operatorname{sen}\left(2\alpha\right)}\text{, } c.\ q.\ d.$$

16.

Como $f(x)=\frac{k}{x}$ **e** $g(x)=-\frac{k}{x}$ **tem-se que** $f'(x)=-\frac{k}{x^2}$ **e** $g'(x)=\frac{k}{x^2}$**.**

Seja P um ponto do gráfico de f de abcissa a $\left(a\in\left]0,+\infty\right[\right)$, isto é $P\left(a,\frac{k}{a}\right)$ e Q o ponto do gráfico de g com a mesma abcissa de P, ou seja, $Q\left(a,-\frac{k}{a}\right)$.

A reta s é tangente ao gráfico de f no ponto P, logo: $m_s=f'(a)=-\frac{k}{a^2}$

A reta s tem de equação reduzida $y=-\frac{k}{a^2}x+b$.

Como a reta s contém o ponto P, tem-se que: $\frac{k}{a}=-\frac{k}{a^2}\times a+b \Leftrightarrow b=\frac{2k}{a}$, isto é,

$s: y=-\frac{k}{a^2}x+\frac{2k}{a}$

Por processos análogos, conclui-se que $t: y=\frac{k}{a^2}x-\frac{2k}{a}$.

Calculando o ponto de interseção entre as retas s e t, tem-se que:

$$-\frac{k}{a^2}x+\frac{2k}{a}=\frac{k}{a^2}x-\frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{4k}{a}=\frac{2k}{a^2} \Leftrightarrow x=2a$$

Logo o ponto R tem de coordenadas $\left(2a,\frac{k}{a^2}\times 2a-\frac{2k}{a}\right)$, ou seja, $R(2a,0)$ e a área pretendida para $a>0$ e $k>0$, é igual a:

$$A_{[PQR]}=\frac{\left|\frac{k}{a}-\left(-\frac{k}{a}\right)\right|\times|2a-a|}{2}=\frac{\frac{2k}{a}\times a}{2}=k\text{, } c.\ q.\ d.$$