

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2017**

Grupo I

1.

A função objetivo é o lucro obtido com a venda de x pães do tipo A e y pães do tipo B:

$$L(x, y) = 0,25x + 0,20y$$

Restrições do problema:

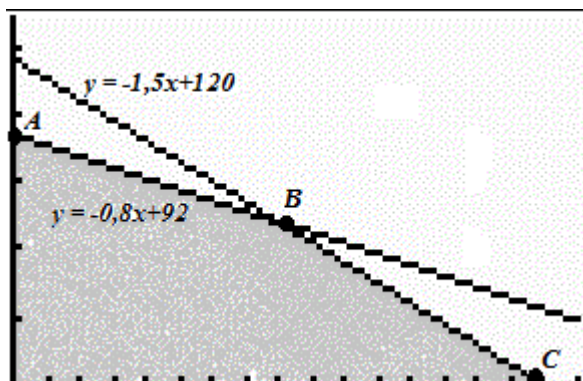
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$0,06x + 0,075y \leq 6,9 \Leftrightarrow 0,8x + y \leq 92$ (dividindo os termos da desigualdade por 0,075. Na calculadora introduzir a expressão $y \leq -0,8x + 92$)

$0,03x + 0,02y \leq 2,4 \Leftrightarrow 1,5x + y \leq 120$ (dividindo os termos da desigualdade por 0,02. Na calculadora introduzir a expressão $y \leq -1,5x + 120$)

Representação gráfica da região admissível:



Vértice	x	y	$L(x, y) = 0,25x + 0,20y$
A	0	92	18,40
B	40	60	22,00
C	80	0	20,00

Solução do problema: $x = 40$, $y = 60$.

O lucro máximo possível desse dia, 22,00€, obtém-se com a produção de 40 pães do tipo A e 60 do tipo B.

2.

Tendo em conta que, $P(X = 1,6) = \frac{1}{2}$, $P(X = 1) = P(X = 1,35) = \frac{1}{4}$, então o valor médio da variável aleatória X é:

$$\mu = 1,6 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} + 1,35 \times \frac{1}{4} = 1,3875$$

Resposta: O valor médio da variável aleatória X é 1,39 euros.

3.

$$\mu - \sigma : 500 - 15 = 485$$

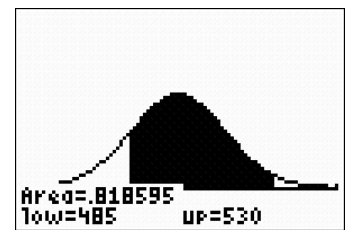
$$\mu + 2\sigma : 500 - 2 \times 15 = 530$$

Seja X a variável aleatória. A probabilidade do pão escolhido estar corretamente embalado é dada por:

$$P(485 \leq X \leq 530) \approx 0,818595$$

```
WINDOW
Xmin=450
Xmax=550
Xscl=10
Ymin=-.01
Ymax=.05
Yscl=1
Xres=1
```

```
ShadeNorm(485,530,
0,500,15)
```



A probabilidade do pão escolhido não estar corretamente embalado é $1 - 0,818595 = 0,181405 \approx 0,18$.

Resposta: A probabilidade do pão escolhido não estar corretamente embalado é 0,18.

Grupo II

1.

$$h(t) = 2,15 + \ln(8,9 - 0,51t)$$

A altura inicial da água no reservatório é dada por:

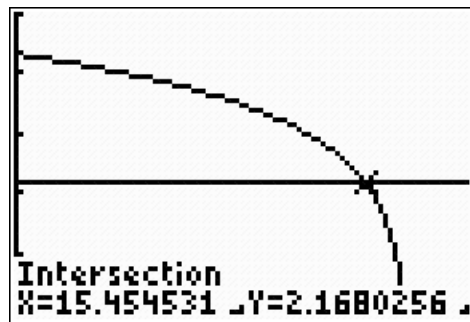
$$h(0) = 2,15 + \ln(8,9 - 0,51 \times 0) = 2,15 + \ln(8,9).$$

Metade da altura do reservatório:

$$\frac{h(0)}{2} = \frac{2,15 + \ln 8,9}{2}.$$

O valor da abcissa do ponto de interseção da reta $y = \frac{2,15 + \ln 8,9}{2}$ com o gráfico de h corresponde ao tempo, após o início do esvaziamento, em que a altura da água é igual a metade da altura do reservatório.

Representação gráfica da função h e da reta $y = \frac{2,15 + \ln 8,9}{2}$ e do ponto de interseção das duas curvas.



Resposta: Ao fim de 15,5 horas a altura da água é igual a metade da altura do reservatório.

2.

Criaram-se duas listas na calculadora, de acordo com os dados fornecidos:

Lista 1	0,32	1,47	3,85	4,29	4,76	5,01	5,86
Lista 2	4,18	3,62	2,78	2,18	1,79	1,72	0,35

Utilizando na calculadora a função CubicReg (regressão cúbica) determinaram-se os valores para $a = -0,032$, $b = 0,194$, $c = -0,723$ e $d = 4,386$.

Considerando o modelo de regressão cúbica $y = -0,032x^3 + 0,194x^2 - 0,723x + 4,386$ e substituindo na equação x por 6, obteve-se $y = 0,12$.

Arredondando às décimas, obtém-se $y = 0,1$.

Resposta: De acordo com o modelo escolhido prevê-se que ao fim de 6 horas a altura da água no reservatório seja 0,1 metros.

Grupo III

1.

1.1.

$$V(t) = 999,9 \times 0,83^t \quad (t \geq 0)$$

Meio ano corresponde a 0,5

$$V(0,5) = 999,9 \times 0,83^{0,5} \approx 910,95225$$

Resposta: Valor da bicicleta meio ano após ter sido comprada, 911 euros.

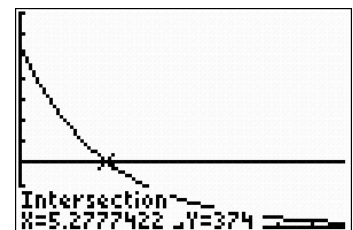
1.2.

$$V(t) = 374$$

O valor da abcissa do ponto de interseção da reta $y = 374$ com o gráfico de V corresponde ao tempo, após a compra, em que o valor da bicicleta é 374 euros.

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=20
Xscl=2
Ymin=0
Ymax=1200
Yscl=120
Xres=1
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=999.9*0.83^X
Y2=374
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```



$$T \approx 5,2777422$$

Resposta: Ao fim de 5,3 anos o valor da bicicleta é 374 euros.

1.3.

$$V(3) = 999,9 \times 0,83^3 \approx 571,72982$$

$$V(0) = 999,9 \times 0,83^0 = 999,9$$

$$\frac{V(3) - V(0)}{3} \approx -142,7233929$$

$$\text{Arredondando às unidades, obtém-se } \frac{V(3) - V(0)}{3} = -143.$$

O valor -143 indica que nos três primeiros anos, a bicicleta do Vicente desvaloriza, em média, 143 euros por ano.

2.

2.1.

$$d(0) = 30 \Leftrightarrow 20 + a \cos(0) = 30 \Leftrightarrow 20 + a = 30 \Leftrightarrow a = 30 - 20 \Leftrightarrow a = 10$$

$$\begin{aligned} d(0,15) = 20 &\Leftrightarrow 20 + 10 \cos(0,15b) = 20 \Leftrightarrow 10 \cos(0,15b) = 20 - 20 \Leftrightarrow 10 \cos(0,15b) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(0,15b) = 0 \Leftrightarrow \cos(0,15b) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0,15b = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b = \frac{\pi}{0,3} + k \frac{\pi}{0,15}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Fazendo $k = 0$, $b = \frac{\pi}{0,3} \approx 10,5 \in [10, 12]$.

Logo $a = 10$ e $b = 10,5$

2.2.

Se 0,3 e 0,6 são os zeros do gráfico da função T , significa que esses são os instantes onde a distância é mínima ou máxima do refletor ao solo.

Neste caso podemos afirmar que no instante $t = 0,3$ o refletor estava à distância mínima do solo e no instante $t = 0,6$ o refletor estava à distância máxima do solo.

Grupo IV

1.

1.1.

A área do triângulo $[ABC]$ é dada por: $A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2}$.

Assim,

$$31 = \frac{4 \times \overline{AB}}{2} \Leftrightarrow 62 = 4 \times \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{62}{4} \Leftrightarrow \overline{AB} = 15,5$$

Usando conhecimentos de trigonometria, tem-se que:

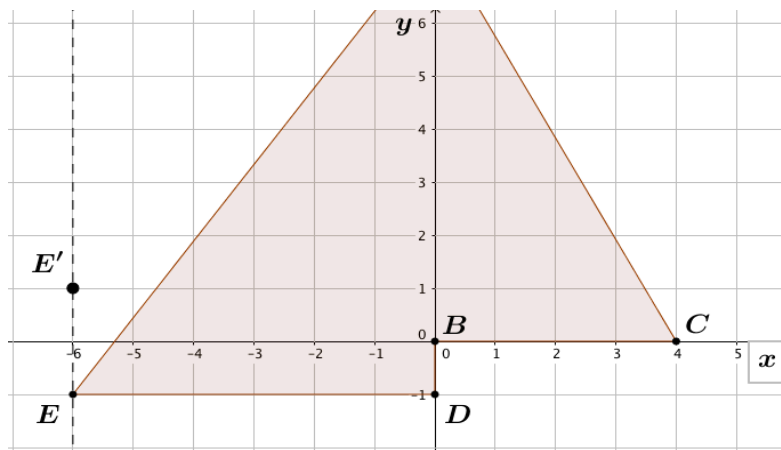
$$\operatorname{tg} 20^\circ \approx 0,3640$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 20^\circ = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} &\Leftrightarrow \operatorname{tg} 20^\circ = \frac{6}{15,5 + \overline{BD}} \Leftrightarrow 0,3640 = \frac{6}{15,5 + \overline{BD}} \Leftrightarrow 0,3640 \times (15,5 + \overline{BD}) = 6 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5,642 + 0,3640 \times \overline{BD} = 6 \Leftrightarrow 0,3640 \times \overline{BD} = 6 - 5,642 \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{6 - 5,642}{0,3640} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{BD} \approx 0,98 \end{aligned}$$

Concluimos que \overline{BD} mede aproximadamente 0,98 metros.

1.2.

Representando as informações dadas num referencial cartesiano o. n. $x O y$, vem que:



Assim, como E tem de coordenadas $(-6, -1)$, então E' será dado por $(-6, 1)$.

2.2.

2.1.

O número de milhas a navegar em cada um dos dias do mês de agosto é: 1; 1.5; 2; 2.5; ... isto é, o número de milhas constitui uma sucessão cujos termos se encontram em progressão aritmética, digamos

$u(n)$, de razão $\frac{1}{2}$.

Sendo assim, o número total de milhas a navegar nos n primeiros dias é a soma dos n primeiros termos

da progressão cujo termo geral é $u_n = 1 + (n - 1) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \frac{n + 1}{2}$.

Essa soma é dada por:

$$\frac{1 + \frac{n+1}{2}}{2} \times n = \frac{2+n+1}{2} \times n = \frac{n+3}{4} \times n = \frac{n^2+3n}{4} \text{ tal como se pretendia mostrar.}$$

2.2.

Com recurso às funcionalidades da calculadora podemos construir a tabela correspondente ao total de milhas navegadas até ao dia n , inclusive. Esse total, como vimos em 2.1. é dado por $\frac{n^2 + 3n}{4}$.

Fazendo na calculadora $y = \frac{x^2 + 3x}{4}$ e obtendo a respetiva tabela da função temos:

Dias	Total navegado
1	1
2	2,5
3	4,5
4	7
5	10
6	13,5
...	...
17	85
18	94,5
19	104,5

Resposta: No dia 19 de agosto o número de milhas navegadas ultrapassa uma centena.