**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO**

**(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2015**

## Grupo I

**1.**

Os dois rapazes devem estar sentados nas extremidades do banco. Há 2 maneiras de isso acontecer. As 4 raparigas podem estar sentadas nos 4 lugares do meio. Há 4! maneiras de elas se sentarem.
Logo: $2\times 4! = 48$

A opção correta é:

| | |
|---|---|
| Versão 1 | (C) |
| Versão 2 | (B) |

**2.**

Como:
$P(\bar{B}) = 0{,}7$ e $P(B) = 1 - P(\bar{B})$, temos $P(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
Assim:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}4+0{,}3-0{,}5\Leftrightarrow P(A\cap B)=0{,}2$$
Então:
$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)=1-0{,}2=0{,}8$$

A opção correta é:

| | |
|---|---|
| Versão 1 | (C) |
| Versão 2 | (B) |

**3.**

$$\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right)=\log_3\left(\frac{3^k}{3^2}\right)=\log_3(3^{k-2})=k-2$$

A opção correta é:

| | |
|---|---|
| Versão 1 | (B) |
| Versão 2 | (A) |

**4.**

Como:

$\lim u_n = \lim(n^2) = +\infty$

Então $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0+0=0$

A opção correta é:

| | |
|---|---|
| Versão 1 | (A) |
| Versão 2 | (D) |

**5.**

A área do quadrilátero [ABCD] pode ser obtida subtraindo a área do triângulo [OAB] à área do triângulo [OCD].

Assim:

$A_{[OCD]} = \frac{\overline{CD}\times\overline{OC}}{2} = \frac{tg \propto \times 1}{2} = \frac{tg \propto}{2}$

$A_{[AOB]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{OB}}{2} = \frac{sen \propto \times cos \propto}{2}$

Logo:

$\text{A}_{[\text{ABCD}]} = A_{[OCD]} - A_{[AOB]} = \frac{tg \propto}{2} - \frac{sen \propto \times cos \propto}{2}$

E como:

$sen \propto \times cos \propto = \frac{sen(2 \propto)}{2}$

Temos que:

$\text{A}_{[\text{ABCD}]} = \frac{tg \propto}{2} - \frac{\frac{sen(2\propto)}{2}}{2} = \frac{tg \propto}{2} - \frac{sen(2 \propto)}{4}$

A opção correta é:

| | |
|---|---|
| Versão 1 | (B) |
| Versão 2 | (C) |

**6.**

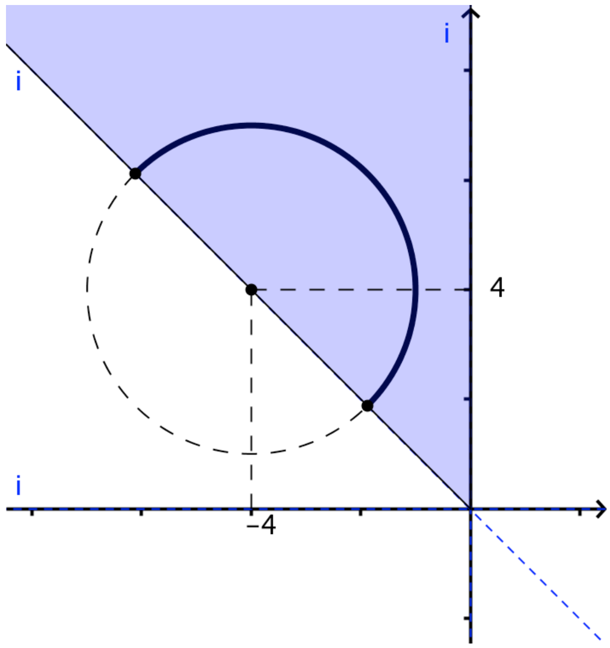
Temos que:

$|z+4-4i| = 3 \Leftrightarrow |z-(-4+4i)| = 3$

Então esta condição representa no plano complexo o conjunto dos pontos cuja distância ao ponto de coordenadas (-4,4) é igual a 3, ou seja a circunferência de centro em (-4,4) e raio 3.

A condição $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$ representa o conjunto de pontos cujos argumentos estão compreendidos entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

Assim, fazendo a interseção dos dois conjuntos, obtemos a semicircunferência representada na figura:




Como:
$perímetro\ da\ circunferência = 2 \times \pi \times 3 = 6\pi$
Então o comprimento pedido é $\frac{6\pi}{2} = 3\pi$

A opção correta é:

| | |
|---|---|
| Versão 1 | (C) |
| Versão 2 | (B) |

**7.**

Como o triângulo [ABC] é equilátero então o ângulo ABC tem de amplitude 60º.
Assim o declive da reta AB é:
$m = tg(60^o) = \sqrt{3}$
Logo a reta AB será uma reta do tipo:
$y = \sqrt{3}x + b$
Como o ponto B de coordenadas (1,0), pertence a esta reta, temos:
$0 = \sqrt{3} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\sqrt{3}$
Logo a reta AB tem por equação:
$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

A opção correta é:

| | |
|---|---|
| Versão 1 | (D) |
| Versão 2 | (C) |

**8.**

$u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$
$u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 4$

A opção correta é:

| | |
|---|---|
| Versão 1 | (B) |
| Versão 2 | (C) |

## Grupo II

**1.** Seja $w_1 = -2 + 2\, i^{19}$

Como $i^{19} = i^{16} \times i^3 = i^3 = -i$ vem $w_1 = -2 + 2\, i^{19} \Leftrightarrow w_1 = -2 + 2\, \times (-i) \Leftrightarrow w_1 = -2 - 2i$.

Tem-se que:

- $|w_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Sendo $\theta$ um argumento de $w_1$, como $\theta \in 3^{\text{o}}$ quadrante e $tg\ \theta = 1$, vem

  $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Assim, $w_1 = 2\sqrt{2}\, cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

Substituindo vem:

$$z = \frac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}\, cis\,\theta} = \frac{2\sqrt{2} cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\, cis\,\theta} = \frac{2cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{cis\,\theta} = 2cis\left(\frac{5\pi}{4} - \theta\right)$$

Para que $z = 2cis\left(\frac{5\pi}{4} - \theta\right)$ seja um imaginário puro, terá de ser verdadeira a igualdade

$\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Tem-se então:

$$\frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow -\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow -\theta = -\frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

Como se pretendem os valores de $\theta$ pertencentes ao intervalo $]0, 2\pi[$ vamos atribuir valores inteiros a *k*.

Para $k = 0$ vem $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Para $k = -1$ vem $\theta = \frac{3\pi}{4} + \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$.

Como $\theta \in \,]0, 2\pi[$ os valores de $\theta$ são então $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$.

**2.**

**2.1.** Sejam:

*H*: "o funcionário escolhido é homem" e *C*: "o funcionário escolhido reside em Coimbra"

Pretende-se calcular $P\left(\overline{H}|C\right)=\dfrac{P\left(\overline{H}\cap C\right)}{P(C)}$.

Como 60% dos funcionários da empresa residem fora de Coimbra, tem-se $P\left(\overline{C}\right)=0,6$

Como o número de homens é igual ao número de mulheres, tem-se $P(H)=P\left(\overline{H}\right)=0,5$

Como 30% dos homens residem fora de Coimbra, tem-se $P\left(\overline{C}|H\right)=0,3$

Determinemos $P\left(\overline{C}\cap H\right)$ :

$$P\left(\overline{C}|H\right)=0,3\Leftrightarrow\frac{P\left(\overline{C}\cap H\right)}{P(H)}=0,3\Leftrightarrow P\left(\overline{C}\cap H\right)=0,3\times P(H)\Leftrightarrow P\left(\overline{C}\cap H\right)=0,3\times 0,5=0,15$$

Determinemos $P(H\cap C)$:

$$P\left(\overline{C}\cap H\right)+P\left(H\cap C\right)=P\left(H\right)\Leftrightarrow P\left(H\cap C\right)=P\left(H\right)-P\left(\overline{C}\cap H\right)\Leftrightarrow P\left(H\cap C\right)=0,50-0,15\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(H\cap C\right)=0,35$$

Determinemos $P\left(\overline{H}\cap C\right)$:

Como $P\left(\overline{C}\right)=0,6$ então, $P(C)=1-P\left(\overline{C}\right)=0,4$

$$P\left(\overline{H}\cap C\right)+P(H\cap C)=P(C)\Leftrightarrow P\left(\overline{H}\cap C\right)=P(C)-P(H\cap C)\Leftrightarrow P\left(\overline{H}\cap C\right)=0,40-0,35\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(\overline{H}\cap C\right)=0,05$$

Assim, $P\left(\overline{H}|C\right)=\dfrac{P\left(\overline{H}\cap C\right)}{P(C)}=\dfrac{0,05}{0,40}=0,125=\dfrac{1}{8}$.

A probabilidade de o funcionário escolhido dessa empresa ser mulher, sabendo que reside em Coimbra é $\dfrac{1}{8}$.

**2.2.** Seja $C$ o acontecimento "O funcionário escolhido reside em Coimbra". Sabe-se que $P(C)=0,4$. Como a empresa tem oitenta funcionários, então, 32 residem em Coimbra, pois $0,4\times 80=32$.

Pretende-se determinar a probabilidade de, num grupo de três funcionários, escolhidos ao acaso, haver no máximo dois a residirem em Coimbra, ou seja haver dois, ou um, ou nenhum a residirem em Coimbra.

O número de casos possíveis é dado por ${}^{80}C_3$ que corresponde ao número de grupos que é possível formar com três funcionários escolhidos de entre os 80 funcionários da empresa.

O número de casos favoráveis é dado por ${}^{80}C_3 - {}^{32}C_3$ em que:

- ${}^{80}C_3$ representa o número total de grupos (nº de casos possíveis);
- ${}^{32}C_3$ representa o número de grupos de três funcionários escolhidos de entre os 32 que residem em Coimbra.

Assim, a diferença ${}^{80}C_3 - {}^{32}C_3$ corresponde ao número de grupos de três funcionários, sendo que, em cada grupo, existem no máximo dois funcionários a residir em Coimbra.

De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à realização desse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis e o espaço de resultados é finito.

Portanto, a probabilidade pedida é dada por $\dfrac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$.

**3.**

**3.1.** Determinemos o raio da esfera, *r*.

Sabe-se que a distância do ponto *P* à base do recipiente é 16 *cm*.

Por outro lado a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto *P* é dada em função de *t*, por $d(t)=10+(5-t)e^{-0,05t}$. No instante inicial a esfera encontra-se na base do recipiente, pelo que a distância do centro da base ao ponto *P* é dado por :

$$\begin{aligned} d(0) &= 10+(5-0)e^{-0,05\times 0} \\ &= 10+5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Assim, o raio da esfera é dado por:

$r = (16-15)\ cm$

$=1\ cm$

O volume da esfera é dado por $V = \frac{4}{3}\pi \times 1^3$.

O valor do volume arredondado às centésimas é dado por $V \approx 4{,}19\ cm^3$.

**3.2.** Para determinar o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto *P* é mínima, comecemos por determinar a expressão analítica da primeira derivada de *d*.

$$d'(t) = (5-t)'e^{-0{,}05t} + \left(e^{-0{,}05t}\right)'(5-t) =$$
$$= -e^{-0{,}05t} - 0{,}05e^{-0{,}05t}(5-t)$$
$$= e^{-0{,}05t}(-1-0{,}25+0{,}05t)$$
$$= e^{-0{,}05t}(-1{,}25+0{,}05t).$$

Como $D_d = \mathbb{R}^+$ e $d'(t) = e^{-0{,}05t}(-1{,}25+0{,}05t)$ então a função *d*' tem domínio $\mathbb{R}^+$

$$d'(t) = 0 \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow e^{-0{,}05t}(-1{,}25+0{,}05t) = 0 \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow -1{,}25+0{,}05t = 0 \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{1{,}25}{0{,}05} \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow t = 25$$

Sinal de $d'$: Como $e^{-0{,}05t}$ é sempre positivo então o sinal de $d'(t)$ depende apenas do sinal de $(-1{,}25+0{,}05t)$. Assim,

$$d'(t) > 0 \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow -1{,}25+0{,}05t > 0 \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow t > \frac{1{,}25}{0{,}05} \wedge t \in D_{d'} \Leftrightarrow t > 25$$

Tabela

| $t$ | 0 | | 25 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $d'$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | |
| $d$ | 15 | $\searrow$ | $d(25)$ | $\nearrow$ | |

Conclusão:

A distância do centro da esfera ao ponto *P* é mínima no instante $t = 25$ segundos.

**4.**

**4.1.** A função *f* é contínua no intervalo $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ por ser o quociente de duas funções contínuas.

A função *f* é contínua no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ por ser o produto de duas funções contínuas.

Uma vez que a função *f* é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, apenas a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ poderá ser assíntota vertical do gráfico de *f*.

Tem-se:

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \left( \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} \right)$; indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Fazendo a mudança de variável: $y = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y + \frac{1}{2}$

Como $x \to \frac{1}{2}^-$ então $y \to 0^-$ e assim,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \left( \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} \right) = \lim_{y \to 0^-} \left( \frac{e^{y+\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2 \times \left( y + \frac{1}{2} \right) - 1} \right) = \lim_{y \to 0^-} \left( \frac{e^{\frac{1}{2}} \left( e^y - 1 \right)}{2y} \right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \lim_{y \to 0^-} \left( \frac{\left( e^y - 1 \right)}{y} \right) \underset{(1)}{=} \frac{\sqrt{e}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{e}}{2}, \quad \text{(1) limite notável}$$

Como *f* é contínua à direita de $\frac{1}{2}$, pois $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) \in \mathbb{R}$, conclui-se assim que o gráfico de *f* não admite assíntotas verticais.

**4.2.** Para efetuar, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, o estudo das concavidades do gráfico de *f* e averiguar a existência de pontos de inflexão, determinemos a expressão analítica da segunda derivada de *f* naquele intervalo.

Cálculo da primeira derivada:

$$f'(x) = [(x+1)\ln x]' $$
$$= (x+1)' \ln x + (x+1)(\ln x)'$$
$$= \ln x + (x+1)\frac{1}{x}$$

Cálculo da segunda derivada:

$$f''(x) = \left[\ln x + (x+1)\frac{1}{x}\right]'$$
$$= (\ln x)' + \left(1 + \frac{1}{x}\right)'$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{x-1}{x^2}$$

Determinemos os zeros da segunda derivada de $f$ no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ .

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

Assim, o zero de $f''$ no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ é $x = 1$.

Estudemos o sinal de $f''$

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\cap$ | $0$ | $\cup$ | |

Por observação da tabela, conclui-se que o gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[1, +\infty[$. O gráfico de $f$ tem um ponto de inflexão de coordenadas $(1, 0)$.

**4.3.** Consideremos agora a função $f$, definida apenas em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

Definamos a função *h* por meio de $h(x)=f(x)-3$

A função *h* é contínua em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ por ser a diferença de duas funções contínuas:

– a função produto de uma função afim $y=x+1$ por uma função logarítmica $y=\ln x$;

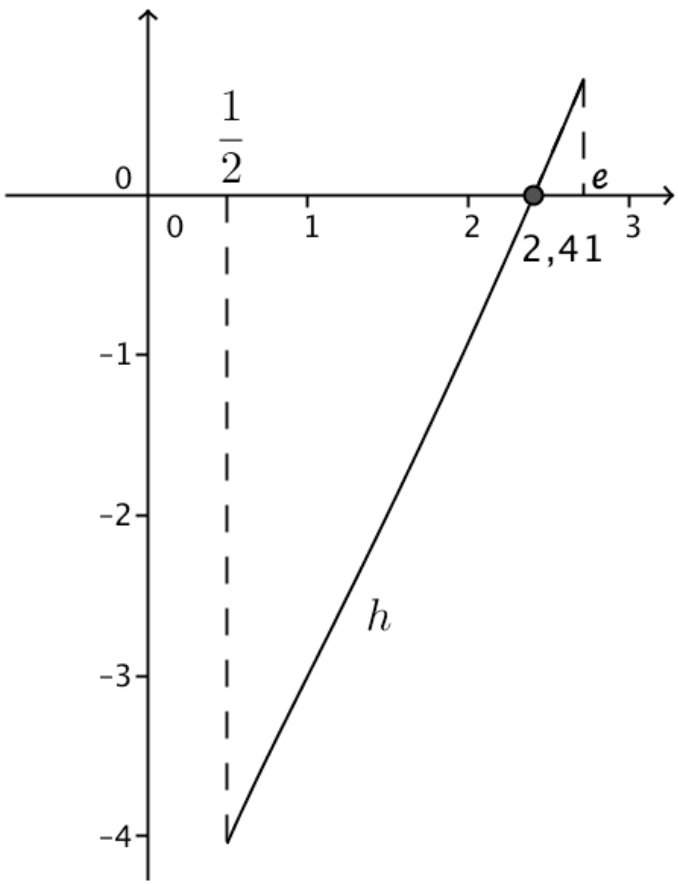
– a função constante $y=3$.

Então *h* é contínua em $[1,e]\subset\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$. Temos também

$h(1)=f(1)-3=0-3=-3; h(e)=(e+1)\ln e-3=e+1-3=e-2.$

Ora $h(1)\times h(e)<0$

Como a função *h* é contínua em $[1,e]$ e $h(1)\times h(e)<0$ então, pelo corolário do teorema de Bolzano, podemos afirmar que existe pelo menos um ponto *c* do intervalo $]1,e[$ tal que *h*(*c*) = 0. Usando a calculadora gráfica tentemos determinar aproximadamente tal ponto *c*.



Na janela de visualização indicada, em que no eixo dos XX incluímos um intervalo que contém o intervalo $]1,e[$ , obtemos o gráfico indicado. Observamos que a função $h$ tem apenas um zero o que corresponde à realidade pois no intervalo $[1,e]$ a função $h$ é estritamente crescente e é contínua, logo a solução da equação $h(x)=0$ é única.

Concluímos assim que no intervalo $[1,e]$ a equação $f(x)=3$ tem uma só solução $x=a$ com $a \approx 2,41$

**5.**

**5. 1.** Como o plano que se procura é paralelo ao plano $\alpha$ então um vetor normal ao plano será $\vec{n}=(1,-2,1)$ pelo que a equação do plano é $x-2y+z+d=0$.

Como o ponto $A$ pertence ao plano temos que

$$0-2\times 0+2+d=0 \Leftrightarrow d=-2$$

Assim, temos que uma possível equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano $\alpha$ é:

$$x-2y+z-2=0$$

**5.2.** Dado que o segmento de reta $[AB]$ é diâmetro da superfície esférica então o ponto médio deste segmento será o centro da circunferência, pelo que

$C=M_{[AB]}$, isto é $C(2,0,1)$

Além disso, o raio da superfície esférica será

$$r=\overline{AC} \Leftrightarrow r=\sqrt{(0-2)^2+(0-0)^2+(1-2)^2}$$
$$\Leftrightarrow r=\sqrt{4+1}$$
$$\Leftrightarrow r=\sqrt{5}$$

Assim, temos que uma equação da superfície esférica será

$$(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5$$

**5.3.<u>1ª resolução</u>**

Tendo em conta que

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AP}\|\times cos(B\hat{A}P) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AP}\|\times cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

calculemos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ e as respetivas normas

$\overrightarrow{AB}=(4,0,0)-(0,0,2)=(4,0,-2)$

$\overrightarrow{AP}=(4,y,0)-(0,0,2)=(4,y,-2)$

$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{4^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$

$\|\overrightarrow{AP}\|=\sqrt{4^2+y^2+(-2)^2}=\sqrt{20+y^2}$.

Assim, vem que

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AP}\|\times cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4,0,-2).(4,y,-2)=\sqrt{20}\times\sqrt{20+y^2}\times\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 16 + 4 = 2\sqrt{5} \times \sqrt{20 + y^2} \times \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{20}{\sqrt{5}} = \sqrt{20 + y^2}$$

e elevando ambos os membros ao quadrado obtemos

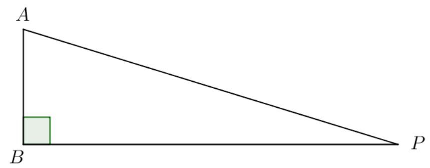
$$\frac{400}{5} = 20 + y^2 \Leftrightarrow 80 = 20 + y^2$$
$$\Leftrightarrow 60 = y^2$$
$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{60}$$

Como $y > 0$ então $y = \sqrt{60}$ e assim se conclui que a ordenada do ponto $P$ é $\sqrt{60}$.

**2ª resolução**

Como $B(4,0,0)$ e $P(4,y,0)$, com $y > 0$, o vetor $\overrightarrow{BP}$ tem coordenadas $(0,y,0)$. Assim, o vetor $\overrightarrow{BP}$ é um vetor normal ao plano $xOz$, pelo que a reta $BP$ é perpendicular a esse plano. Deste modo, $BP$ é perpendicular a todas as retas do plano $xOz$, logo é perpendicular à reta $AB \subset xOz$.

Concluímos assim que o triângulo $[ABP]$ é retângulo em $B$.




Sabe-se que $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$, então através da trigonometria do triângulo retângulo tem-se:

$$tan\frac{\pi}{3} = \frac{\|\overrightarrow{BP}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Como $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{20}$ e $\|\overrightarrow{BP}\| = \|y\| = y$, pois $y > 0$, então $tg\frac{\pi}{3} = \frac{y}{\sqrt{20}} \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \times \sqrt{20} \Leftrightarrow y = \sqrt{60}$

Daqui conclui-se que $y = \sqrt{60}$.

**6.** Como a reta $r$ é tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de abcissa $a$ então $m_r = f'(a)$.
Assim, $f'(x) = (1 - \cos(3x))' \Leftrightarrow f'(x) = 3\,\text{sen}(3x)$ e portanto $m_r = f'(a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow m_r = 3\text{sen}\,(3a)$.

Além disso, sendo a reta $s$ tangente ao gráfico da função $g$ no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$ então $m_s = g'(a + \frac{\pi}{6})$.

Como $g'(x) = (\text{sen}(3x))' \Leftrightarrow g'(x) = 3\cos\,(3x)$ temos que

$$m_s = g'(a + \frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow m_s = 3\cos\left(3(a + \frac{\pi}{6})\right) \Leftrightarrow m_s = 3\cos\left(3a + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow m_s = -3\,\text{sen}(3a)$$

Como as retas $r$ e $s$ são perpendiculares então

$$
\begin{aligned}
m_r = -\frac{1}{m_s} &\Leftrightarrow 3\,\mathrm{sen}(3a) = -\frac{1}{-3\,\mathrm{sen}(3a)} \\
&\Leftrightarrow 9\,\mathrm{sen}^2(3a) = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{sen}^2(3a) = \frac{1}{9} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{sen}(3a) = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \\
&\Leftrightarrow \mathrm{sen}(3a) = \pm\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Como $\frac{\pi}{3} < a < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < 3a < \frac{3\pi}{2}$ então conclui-se que $3a \in 3^{\text{º}}Q$ pelo que $\mathrm{sen}(3a) < 0$.
Logo, $\mathrm{sen}(3a) = -\frac{1}{3}$, como pretendíamos demonstrar.