GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/2.ª Fase

13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente, sempre que recorrer:

- às potencialidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma reta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 3, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Uma escola secundária está a reorganizar a ludoteca.

1. A chave que abre a porta da ludoteca está num porta-chaves, juntamente com outras duas chaves que não abrem essa porta.

Um professor tem esse porta-chaves e quer abrir a porta da ludoteca, mas não sabe qual das três chaves deve usar.

Na primeira tentativa para abrir a porta, escolhe, ao acaso, uma das três chaves; se esta chave não for a que abre a porta, coloca-a de parte e, numa segunda tentativa, escolhe, ao acaso, uma das outras chaves; se esta chave também não abrir a porta, coloca-a de parte e, finalmente, usa a terceira chave para abrir a porta.

1.1. Na primeira tentativa, o professor não escolheu a chave que abria a porta da ludoteca.

Qual é a probabilidade de abrir a porta à segunda tentativa?

Justifique a sua resposta.

1.2. Seja X a variável aleatória «número de chaves usadas pelo professor até abrir a porta».

Determine o desvio padrão da variável aleatória X

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Na sua resposta, deve apresentar a tabela de distribuição da variável aleatória X

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

2. Na ludoteca, existem diversos jogos, entre eles, o Quatro em Linha e o xadrez.

O tabuleiro de xadrez tem a forma de um quadrado, dividido em 64 quadrados iguais, como ilustra a Figura 1.

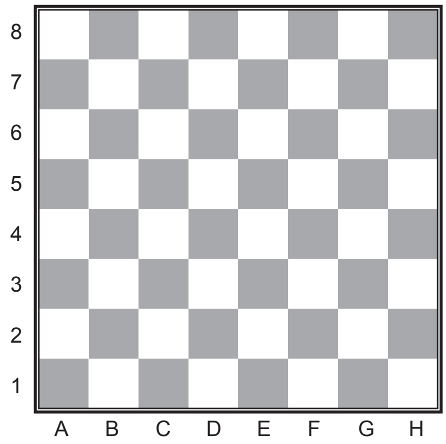

Figura 1

As peças do Quatro em Linha são planas, têm forma circular e são todas do mesmo tamanho.

Um aluno, o José, pensou em empilhar peças do Quatro em Linha no tabuleiro de xadrez da seguinte forma:

- no quadrado $A1$, pretendia colocar uma peça;
- no quadrado $B1$, pretendia colocar duas peças sobrepostas;
- no quadrado $C1$, pretendia colocar quatro peças sobrepostas;
- e assim sucessivamente, pretendendo colocar em cada quadrado o dobro do número de peças colocadas no quadrado anterior, até todos os quadrados do tabuleiro estarem preenchidos com peças.

Um outro aluno, o Rui, depois de saber o que o José pretendia, afirmou:

«Mesmo que demorasses 2 segundos a colocar cada uma das peças e houvesse um número suficiente de peças, não conseguirias sequer preencher metade dos quadrados do tabuleiro, ainda que estivesses durante 100 anos, ininterruptamente, a empilhar peças dessa forma.»

Mostre que a afirmação do Rui é correta.

Nota – Considere que um ano tem 365 dias.

Sugestão – Na sua resposta, poderá determinar quantos anos seriam necessários para o José preencher metade dos quadrados do tabuleiro.

GRUPO II

Os alunos de uma turma, organizados em grupos de trabalho, realizaram várias atividades de carácter interdisciplinar no dia do aniversário da sua escola.

1. No âmbito de uma das atividades, os alunos de um dos grupos de trabalho fizeram registos periódicos da temperatura de um chá, durante um certo período de tempo em que o chá arrefecia.

Admita que a temperatura do chá, T, em graus Celsius, t minutos após ter sido feito o primeiro registo, é dada por

$$T(t) = 18 + 70e^{-0,05t} \qquad \text{para } t \geq 0$$

1.1. Sabe-se que, nesse dia, o primeiro registo da temperatura do chá foi feito às 11 horas, o segundo registo às 11 horas e 05 minutos, o terceiro registo às 11 horas e 10 minutos, e assim sucessivamente, de modo que o intervalo de tempo decorrido entre quaisquer dois registos consecutivos foi exatamente 5 minutos.

Determine, de acordo com o modelo apresentado, a variação da temperatura do chá entre o instante em que foi feito o primeiro registo e o instante em que foi feito o oitavo registo.

Apresente o resultado em graus Celsius, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, uma casa decimal.

1.2. Um dos alunos desse grupo concluiu, corretamente, que «o valor da taxa de variação instantânea da função T, para $t = 1$, é aproximadamente igual a $-3,3$ ºC/min».

Interprete, no contexto da situação descrita, o significado da conclusão obtida pelo aluno.

2. Outra das atividades realizadas pelos alunos de um grupo de trabalho consistiu em determinar o valor do pH de algumas soluções aquosas. Esse valor depende da concentração de iões H_3O^+ existente na solução e indica a sua acidez ou a sua alcalinidade.

À temperatura de $25\ ºC$, uma solução aquosa é considerada ácida se o valor do seu pH for inferior a 7 e é considerada alcalina se o valor do seu pH for superior a 7. No caso de o valor do pH ser igual a 7, nas mesmas condições de temperatura, considera-se que a solução é neutra.

Seja x a concentração de iões H_3O^+, em mol/dm^3, numa determinada solução aquosa e y o valor do seu pH.

Sabe-se que:

$$y = -\log_{10}(x)$$

2.1. Um dos alunos determinou corretamente a concentração de iões H_3O^+, em mol/dm^3, existente na água pura, que, à temperatura de $25\ ºC$, é considerada uma solução neutra.

Qual foi o valor obtido pelo aluno para essa concentração?

Justifique a sua resposta.

2.2. Outros alunos determinaram corretamente a concentração de iões H_3O^+, em mol/dm^3, de quatro soluções aquosas e registaram os valores encontrados numa tabela como a que se segue.

Solução aquosa	**Concentração de iões H_3O^+ (mol/dm^3)**
Sumo de limão	$5{,}01 \times 10^{-3}$
Chá	$3{,}16 \times 10^{-6}$
Água do mar	1×10^{-8}
Lixívia	$3{,}16 \times 10^{-14}$

Com base nesses valores, um dos alunos apresentou as seguintes conclusões:

I) A água do mar é uma solução alcalina.

II) O valor do pH da lixívia é exatamente igual a 14

III) O valor do pH do chá é superior ao triplo do valor do pH do sumo de limão.

Justifique, numa pequena composição, que a afirmação I) é verdadeira e que as afirmações II) e III) são falsas.

GRUPO III

Junto a uma piscina infantil de um complexo turístico, pretende-se construir, numa superfície plana, uma zona de lazer, formada por duas regiões distintas, uma pavimentada e a outra relvada.

A Figura 2 mostra um esquema utilizado no estudo que serviu de base à elaboração do projeto da zona de lazer.

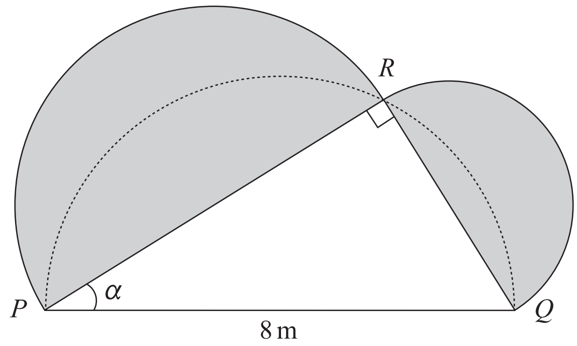

Figura 2

Desse esquema, construído a partir de uma semicircunferência de diâmetro $[PQ]$, sabe-se que:

- $\overline{PQ} = 8\,\text{m}$
- o ponto R é um ponto móvel da semicircunferência de diâmetro $[PQ]$
- o triângulo $[PQR]$ representa a região que se pretende pavimentar;
- os dois semicírculos, que estão a sombreado, têm diâmetros $[PR]$ e $[RQ]$, respetivamente, e representam a região que se pretende relvar;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

1. Mostre que a área da região que se pretende relvar, representada a sombreado na Figura 2, é exatamente igual a $8\pi\ \text{m}^2$, seja qual for o valor de α

Sugestão – Na sua resposta, poderá começar por obter $\overline{PR}$ e $\overline{RQ}$ em função de α

2. A área, A, em m^2, da região triangular que se pretende pavimentar é dada, em função de α, por

$$A(\alpha) = 32\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) \qquad \text{para } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

2.1. Determine para que valores de α a área da região que se pretende pavimentar é superior a $10\,\text{m}^2$

Apresente o resultado na forma de intervalo de números reais $]a, b[$, com os valores de a e de b, em radianos, arredondados às centésimas.

2.2. Seja c um número real, diferente de $\frac{\pi}{5}$

Existe um único valor de c para o qual a taxa de variação média da função A no intervalo $\left[\frac{\pi}{5}, c\right]$ é igual a zero.

Determine o valor de c

Apresente o resultado em radianos, arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

2.3. Na Figura 3, apresenta-se um esboço do gráfico da função F

Esta função dá, em $\mathrm{m^2/rad}$, a taxa de variação instantânea da função A, para cada valor de α

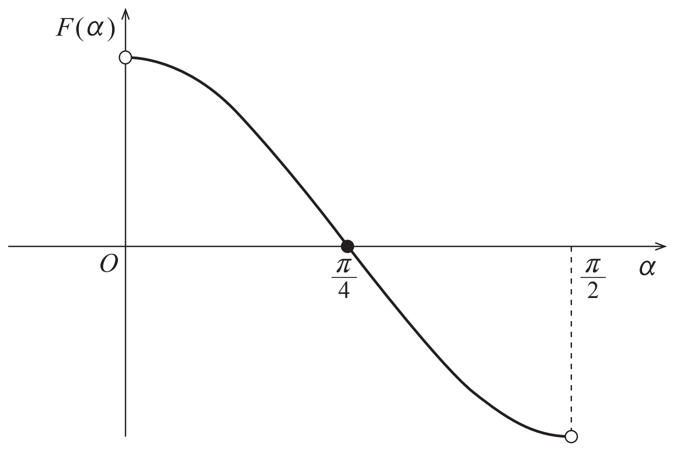

Figura 3

Tal como a Figura 3 ilustra, a função F tem um único zero, $\frac{\pi}{4}$

Interprete, no contexto do problema, o facto de a função F mudar de sinal, passando de positiva a negativa, em $\alpha = \frac{\pi}{4}$

Justifique a sua resposta com base na relação existente entre o sinal da função F e a monotonia da função A

GRUPO IV

Se uma superfície plana for totalmente preenchida com figuras geométricas, de modo a não existirem espaços nem sobreposições entre elas, obtém-se uma pavimentação. Os polígonos regulares são frequentemente usados em pavimentações.

1. No âmbito das comemorações do centenário da República Portuguesa, a empresa Correios de Portugal emitiu uma série filatélica dedicada ao Palácio de Belém. A Figura 4 apresenta uma fotografia da Sala das Bicas, reproduzida num dos selos que integram essa série.

Figura 4

O chão da sala, em mármore, foi pavimentado com mosaicos octogonais, de cor branca, e com mosaicos quadrados, de cor preta.

1.1. A Figura 5 mostra um esquema de dois octógonos regulares como os dos mosaicos que pavimentam a Sala das Bicas, com o lado comum $[PQ]$. No esquema, está assinalado um ângulo interno de um dos octógonos.

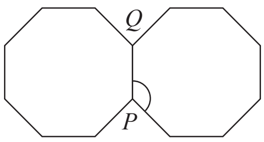

Figura 5

Mostre que, quando se pretende pavimentar uma superfície plana de modo que num ponto concorram apenas três polígonos, todos regulares, dois dos quais são octógonos, então o outro só pode ser quadrado.

1.2. Os mosaicos brancos utilizados para pavimentar o chão da Sala das Bicas são todos iguais e têm a forma de um octógono regular. Os mosaicos pretos utilizados também são todos iguais e têm a forma de um quadrado.

A Figura 6 mostra um esquema, que não está à escala, no qual se apresenta o modo como os mosaicos foram dispostos no chão da sala. A pavimentação foi feita sem que nenhum dos mosaicos brancos tivesse sido cortado; apenas foram cortados alguns dos mosaicos pretos, tal como o esquema ilustra.

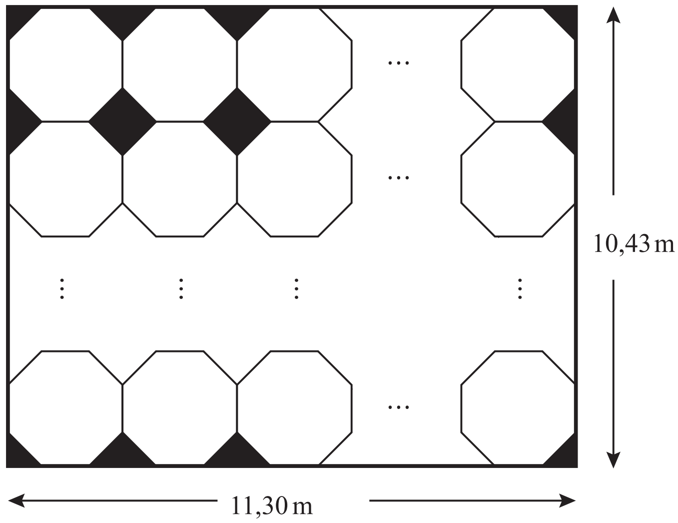

Figura 6

Sabe-se que:

- cada mosaico branco tem $18\,\mathrm{cm}$ de lado;
- a pavimentação da sala ocupa um retângulo com $11{,}30\,\mathrm{m}$ de comprimento e $10{,}43\,\mathrm{m}$ de largura.

1.2.1. Mostre que, no total, foram utilizados 624 mosaicos brancos na pavimentação do chão da Sala das Bicas.

Em cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

1.2.2. Determine a área total ocupada pelos mosaicos pretos.

Apresente o resultado em metros quadrados, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

Note que o número de mosaicos brancos utilizados na pavimentação do chão da Sala das Bicas é 624

2. Numa pavimentação, foi usado um certo quadrado. Em relação a esse quadrado, sabe-se que são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, pela ordem indicada, os valores correspondentes

- ao comprimento do lado, em centímetros;
- ao perímetro, em centímetros;
- à área, em centímetros quadrados.

Qual é o comprimento, em centímetros, do lado desse quadrado?

Justifique a sua resposta.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	
1.1.	10 pontos
1.2.	20 pontos
2.	10 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	10 pontos
2.	
2.1.	10 pontos
2.2.	20 pontos
	55 pontos

GRUPO III

1.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
2.3.	15 pontos
	60 pontos

GRUPO IV

1.	
1.1.	10 pontos
1.2.	
1.2.1.	10 pontos
1.2.2.	10 pontos
2.	15 pontos
	45 pontos

TOTAL .... **200 pontos**