PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS (PROVA 835)

2008 – 2ª Fase

1.

1.1. Número de votos na 1ª preferência:

- Madrid – 50 + 30 = 80 votos;
- Vigo – 60 votos;
- Sevilha – 40 votos;
- Granada – 14 + 22 = 36 votos.

1.2. Para ser eleita vencedora na primeira contagem, uma cidade teria que ter obtido uma maioria absoluta de votos na primeira preferência, ou seja o número mínimo de votos necessários na primeira preferência seria metade do total registado mais um voto.
O número total de votos é 216; metade é 108. Então o número mínimo de votos necessários para ser eleita vencedora na primeira contagem é 109.

1.3. Como na primeira contagem nenhuma cidade obteve 109 votos, é necessário fazer uma segunda contagem, eliminando Granada, a cidade menos votada.
Quadro de preferências reestruturado:

Preferências	**Votos**				
1ª	Madrid	Vigo	Sevilha	Madrid	Sevilha
2ª	Sevilha	Sevilha	Vigo	Vigo	Madrid
3ª	Vigo	Madrid	Madrid	Sevilha	Vigo
Total de votos	**50**	**60**	**40**	**14+30=44**	**22**

Número de votos na 1ª preferência:

- Madrid – 50 + 44 =94 votos;
- Vigo – 60 votos;
- Sevilha – 40 + 22 = 62 votos.

Mais uma vez, nenhuma cidade obteve 109 votos, logo é necessário fazer uma terceira contagem, eliminando agora Vigo, a cidade menos votada.

Quadro de preferências reestruturado:

Preferências	**Votos**	
1ª	Madrid	Sevilha
2ª	Sevilha	Madrid
Total de votos	**50 + 44=94**	**60+40+22=122**

Número de votos na 1ª preferência:

- Madrid – 94 votos;
- Sevilha – 122 votos.

A cidade onde se vai realizar a viagem de finalistas, utilizando o método descrito, é Sevilha.

1.4. Uma vez que 4% dos alunos do 12º ano desta escola não votaram, 216 votos correspondem a 96% dos alunos do 12º ano.

O número total dos alunos é $\frac{216 \times 100}{96} = 225$.

225 alunos frequentaram o 12º ano nesta escola.

2.

2.1. O modelo de regressão linear que se ajusta à nuvem de pontos apresentada é:

$$y = 8{,}2\,x - 3{,}5$$

estando os valores apresentados arredondados às décimas.

2.2. De acordo com o modelo logístico, que se ajusta aos dados da situação, o número de animais existentes, na área protegida, 20 anos após a sua criação, calcula-se:

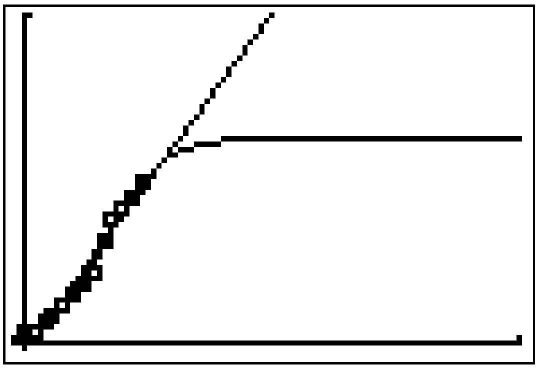
$y(20) = \frac{125{,}445}{1 + 18{,}351 \times e^{-0{,}355 \times 20}} \approx 124$ animais (resultado arredondado às unidades).

2.3. De entre os dois modelos considerados, o de regressão linear e o logístico, o que melhor interpreta a situação descrita para o primeiro meio século de existência da área protegida é o modelo logístico.

Uma das razões que afasta o modelo linear, $y = 8{,}2\,x - 3{,}5$, é o facto de $y\,(0) = -3{,}5$, ou seja, prevê um número negativo de animais no início da criação da área protegida, enquanto que o modelo logístico, $y = \frac{125{,}445}{1 + 18{,}351 \times e^{-0{,}355x}}$ prevê cerca de 6 animais, $y\,(0) \approx 6$, o que se adequa mais à realidade que são 8.

O modelo logístico é preferível por estimar igualmente em 125 o número de animais tanto ao fim dos 50 anos, $y\,(50) \approx 125$, como ao fim de 25, $y\,(25) \approx 125$, altura em que se previa que a área protegida atingisse a sua capacidade máxima.

A visualização dos gráficos dos dois modelos juntamente com a respectiva nuvem de pontos permite confirmar a adequabilidade do modelo logístico para interpretar a situação durante o primeiro meio século.



Janela de Visualização:$[0,50] \times [0,200]$

3.

3.1. Comece-se por construir a tabela, referente ao sexo masculino, das frequências relativas em percentagem.

Intensidade do gosto de ler	Frequência relativa (%)
Não gosto nada de ler	12
Gosto pouco de ler	26
Gosto de ler de vez em quando	44
Gosto muito de ler	15
Sou viciado na leitura	3

Para analisar a afirmação escrita entre aspas nesta questão, considere-se inicialmente a frase "a moda da intensidade do gosto de ler é a mesma para ambos os sexos". Ora, da tabela das frequências relativas para o sexo masculino conclui-se que a moda da intensidade do gosto de ler é fazê-lo de vez em quando, apresentando uma percentagem de 44 no estudo elaborado. Do gráfico de barras referente à frequência relativa, em percentagem, da intensidade do gosto de ler no sexo feminino, conclui-se que a moda é também "Gosto de ler de vez em quando", com uma preferência de 49%. Desta forma constata-se que a moda da intensidade do gosto de ler é a mesma em ambos os sexos.

Passe-se a analisar a segunda parte da afirmação, "as raparigas revelaram um maior gosto pela leitura do que os rapazes" e calcule-se a percentagem dos que revelaram pelo menos algum gosto pela leitura:

- nas raparigas, 11 + 49 + 31 + 6 = 97%;
- nos rapazes, 26 + 44 + 15 + 3 = 88%.

Donde se conclui que as raparigas revelaram um maior gosto pela leitura do que os rapazes.

A afirmação na sua globalidade, "A moda da intensidade do gosto de ler é a mesma para ambos os sexos, mas, neste inquérito, as raparigas revelaram um maior gosto pela leitura do que os rapazes", é verdadeira.

3.2. O intervalo com uma confiança de 95% para a proporção de estudantes do ensino secundário, do Continente, que se identificam como sendo apaixonados pela leitura é do tipo:

$$\left] \hat{p} - 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\ ,\quad \hat{p} + 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \right[\qquad \text{sendo} \qquad \hat{p} = \frac{221}{4713} \approx 0{,}0469$$

$$n = 4713$$

$$\hat{p} - 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \approx 0{,}0469 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}0469(1-0{,}0469)}{4713}} \approx 0{,}041$$

$$\hat{p} + 1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \approx 0{,}0469 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}0469(1-0{,}0469)}{4713}} \approx 0{,}053$$

O intervalo pedido é $]\ 0{,}041\ ;\ \ 0{,}053\ [$.

4.

4.1. Registe-se numa tabela de dupla entrada os resultados possíveis da soma das pontuações das faces voltadas para cima ao lançar dois dados numerados de 1 a 6.

Soma		Dado 1					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado 2	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Para que a Vanda seleccione um romance de ficção científica, a soma das pontuações tem de ser um múltiplo de cinco. Pela observação da tabela, o conjunto dos múltiplos de cinco é $\{5, 10\}$. A probabilidade de obter um múltiplo de cinco, no lançamento de dois dados equilibrados registando a soma das pontuações das faces voltadas para cima, é $\frac{7}{36}$ uma vez que há 7 múltiplos de cinco, assinalados na tabela, num total de 36 casos possíveis.

4.2. X - "Número de livros policiais seleccionados numa estante que contém livros policiais numerados de 1 a 15 e de aventuras numerados de 16 a 35".

X pode tomar os valores:

- Zero – não são seleccionados livros policiais, ou seja, são seleccionados dois de aventuras;
- Um – é seleccionado um livro policial e um de aventura (não necessariamente por esta ordem);
- Dois – são seleccionados dois livros policiais.

Calculem-se as respectivas probabilidades:

- $P\ (X = 0) = \frac{20}{35} \times \frac{19}{34} = \frac{38}{119}$

  Tanto na primeira como na segunda extracção, são retiradas duas peças com números compreendidos entre 16 e 35. Na primeira extracção há 20 peças favoráveis num total de 35 possíveis e na segunda já só há 19 em 34 (uma vez que não há reposição da primeira peça).
- $P\ (X = 1) = \frac{15}{35} \times \frac{20}{34} + \frac{20}{35} \times \frac{15}{34} = \frac{60}{119}$

  Dois casos a considerar: sair livro policial seguido de aventura ou sair livro de aventura seguido de policial. No primeiro caso, uma peça favorável à primeira extracção é uma peça com um número compreendido entre 1 e 15, num total de 35 possíveis, na segunda extracção uma peça favorável é uma peça com um número compreendido entre 16 e 35 num total de 34 peças possíveis. No segundo caso, uma peça favorável à primeira extracção é uma peça com um número compreendido entre 16 e 35, num total de 35 possíveis, na segunda extracção uma peça favorável é uma peça com um número compreendido entre 1 e 15, num total de 34 peças possíveis.
- $P\ (X = 2) = \frac{15}{35} \times \frac{14}{34} = \frac{21}{119}$.

  Tanto na primeira como na segunda extracção, são retiradas duas peças com números compreendidos entre 1 e 15. Na primeira extracção há 15 peças favoráveis num total de 35 possíveis e na segunda já só há 14 em 34 (uma vez que não há reposição da primeira peça).

Número de livros Policiais	0	1	2
Probabilidade associada	$\frac{38}{119}$	$\frac{60}{119}$	$\frac{21}{119}$